Exponentielles Wachstum

Teil 1

Prozentuales Wachstum wird mit Exponentialfunktionen berechnet

Themenheft für die Grundlagen

ab Klasse 10

Viel Theorie mit Musterbeispielen

Aber auch gründliche Besprechung aller Grundaufgaben

Datei Nr. 18810

Stand: 3. Dezember 2015

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Zur Beschreibung von Wachstum hat man verschiedene mathematische Wachstumsmodelle eingeführt, die möglichst gut die Naturvorgänge beschreiben sollen. Man sollte dabei klar zwischen stetigem und sprunghaftem Wachstum unterscheiden. Wenn Wasser einen Behälter füllt, nimmt sein Volumen stetig zu (wobei wir jetzt nicht beachten wollen, dass die Wassermoleküle im Grunde nicht teilbar sind und so das Wasser im Grunde auch in „Miniportionen" in den Behälter kommt). **Prozentuales Wachstum** wird oft nicht stetig vonstatten gehen. Denken wir an die Vermehrung unseres Geldes auf einer Bank. Der Zins fließt nicht kontinuierlich, er kommt nach bestimmten Zeitabschnitten auf das Konto. Also wird die Kontostandsfunktion immer wieder Sprünge machen und dazu konstante Phasen haben. In solchen Fällen wird man oft besser mit **Wachstumsfolgen** arbeiten, anstatt mit stetigen Wachstumsfunktionen. **Wir werden sehen, dass prozentuales Wachstum exponentielles Wachstum ist, weil es auf der Basis von Exponentialfunktionen geschieht.** Dieser Text zeigt ausführlich, wie man auf Wachstumsfolgen und -funktionen kommt und welche wichtigen Aufgaben es dazu gibt, siehe Inhaltsverzeichnis. Die Fortsetzung auf Oberstufenniveau, also mit den Hilfsmitteln der Analysis, steht im Text mit der Nummer 45810.

Hier die Übersicht über die Vielfalt der Texte zum Wachstum:

Niveau Klassenstufe 10:

Niveau Oberstufe (mit Hilfsmitteln der Analysis)

Inhalt

§ 1 Prozentuales Wachstum mit Wachstumsfaktoren

1.1 Jede prozentuale Zunahme kann man mit einem Faktor berechnen

Beispiel 1: Preisaufschlag

Ein Computerchip kostet 120 €. Durch einen vorübergehenden Lieferengpass erhöhen die Hersteller den Preis um 15%. Wie viel kostet er dann?

Lösung:

Die folgende Überlegung muss man einmal verstanden haben und dann immer wissen:

Merke:

Neuer Preis = Alter Preis + Preiszunahme

Die **Berechnung der Preiszunahme** ist eine Grundaufgabe der Prozentrechnung:

Preiszunahme = 15% von 120 €

d. h. Preiszunahme = 15% **mal** 120 €

also: Preiszunahme = $\frac{15}{100}$ mal 120 €

d. h. Preiszunahme = $0{,}15 \cdot 120$ €

Das ist alles das gleiche!

Ergebnis: Neuer Preis = 120 € + $0{,}15 \cdot 120$ €

Jetzt klammert man den in beiden Summanden steckenden alten Preis 120 € aus.
Dann entsteht diese Gleichung:

Neuer Preis = $(1+0{,}15)\cdot 120$ €

d. h. Neuer Preis = **1,15** $\cdot$ 120 €

Ergebnis: Neuer Preis = **Wachstumsfaktor** $\cdot$ 120 €

Dem Faktor 1,15 entnimmt man diese Information:

Die darin enthaltene Zahl 1 heißt „1-mal der alte Preis"
Die die nach dem Komma folgende 15 heißt „plus 15% des alten Preises".

MERKE: Eine Erhöhung des Preises um p = 15% kann man dadurch berechnen, dass man **den alten Preis mit dem Wachstumsfaktor q = 1,15 multipliziert.**

Er wird so gebildet: $q = 1 + p$

(Man addiert den Zahlenwert 0,15 = 15% zu 1.)

Ergebnis:

Umständliche Rechnung:

Neuer Preis $= 120\text{ €} + 0{,}15 \cdot 120\text{ €}$

$= 120\text{ €} + 18\text{ €} = 138\text{ €}$

Kurze Rechnung:

Neuer Preis = $120\text{ €} \cdot 1{,}15 = 138\text{ €}$.

Beispiel 2: Mehrwertsteuer

Ein Computerchip kostet netto 120 €. Zum Verkaufspreis kommen noch 19% Mehrwertsteuer.
Berechne den Bruttopreis (Verkaufspreis).

Lösung: Bruttopreis = Nettopreis + Mehrwertsteuer

Mehrwertsteuer = 19% vom Nettopreis

d. h. Mehrwertsteuer $= 19\%$ von 120 €

also: Mehrwertsteuer $= 0{,}19$ mal 120 €

$\boxed{\text{Bruttopreis} = \text{NPr} + \text{NPr} \cdot 0{,}19 = \text{NPr} \cdot (1 + 0{,}19) = \text{NPr} \cdot 1{,}19}$

Bruttopreis = Nettopreis mal Steuerfaktor 1,19

Umständliche Rechnung:

Verkaufspreis $= 120 \text{ €} + 0{,}19 \cdot 120 \text{ €}$

$= 142{,}80$ €

Kurze Rechnung:

Verkaufspreis = $120 \text{ €} \cdot 1{,}19 = 142{,}80 \text{ €}$.

Der hier verwendete **Wachstumsfaktor** ist $q = 1 + p = 1 + 0{,}19 = 1{,}19$.

Beispiel 3: Zins

Eine Bank belohnt ihre Kunden dafür dass man sein Geld „auf ein Konto legt".
Wenn sie beispielsweise einen Zinssatz von 2,5% (p.a.) anwendet, dann heißt dies,
dass sie dem Kunden jährlich 2,5% seines Guthabens als „Zins" gutschreibt.
(p.a. heißt „per anno" = jährlich)

Neuer Kontostand = Alter Kontostand + Zins

Berechnung des Zinses für G = 3400 €:

Zins = $\boxed{2{,}5\% \text{ von}}$ 3400 €

d. h. Zins = $\boxed{\tfrac{2{,}5}{100} \text{ mal}}$ 3400 €

also: Zins = $\boxed{0{,}025 \cdot 3400 \text{ €}} = 85$ €

$\boxed{\text{Neuer Kontostand} = \text{AKSt} + \text{AKSt} \cdot p = \text{AKSt} \cdot (1 + p) = \text{AKSt} \cdot q}$

Neuer Kontostand = Alter Kontostand mal Zinsfaktor

Verzinstes Guthaben nach 1 Jahr:

Umständliche Rechnung:

$G' = 3400 \text{ €} + 3400 \cdot 0{,}025 \text{ €}$

$G' = 3400 \text{ €} + 85 \text{ €} = 3485 \text{ €}$

Kurze Rechnung:

$G' = 3400 \text{ €} \cdot 1{,}025 = 3485 \text{ €}$

Hier wurde aus dem Zinssatz p = 2,5% der **Zinsfaktor** $q = 1 + p = 1 + 0{,}025 = 1{,}025$.

Beispiel 4

Ich schreibe jetzt verschiedene Gleichungen an, die jeweils eine **prozentuale Zunahme** darstellen. Sie werden alle mit einem Wachstumsfaktor berechnet:

a) **Verzinster Kontostand:** $G = 1890\ € \cdot 1{,}05 = 1984{,}50\ €$

Hier wurden 1890 € mit einem Zinssatz von p =5 % verzinst. Zinsfaktor: q = 1,05.

b) **Bakterienwachstum:** $m = 450 \cdot 1{,}2 = 540$

Hier hat sich ein Bakterienstamm von 450 Individuen in einer bestimmten Zeit um p = 20% vermehrt zu nunmehr 540 Individuen. Wachstumsfaktor: q = 1,2.

c) **Schimmelpilz:** $A = 24\ cm^2 \cdot 1{,}08 = 25{,}92\ cm^2$

Die Oberfläche einer Schimmelpilzkultur hat sich in einer bestimmten Zeitspanne um p = 8% vermehrt. Wachstumsfaktor: q = 1,08.

d) **DAX-Index:** $Index = 5812 \cdot 1{,}015 = 5899{,}18$

Der Index der Aktien der im DAX gelisteten Firmen hat sich innerhalb (z.B.) eines Tages um p = 1,5% vermehrt. Wachstumsfaktor: q = 1,015.

e) **Wahlumfrage:** $320 \cdot 1{,}15 = 368$

Unter 1000 befragten Personen wollten zuerst 320 die Partei CDU wählen. Nach einem halben Jahr wurden dieselben Personen befragt. Man verzeichnete eine Zunahme um p = 15 %. Wachstumsfaktor q = 1,15.

Und darauf kommt es an:

Achtung: Der Faktor 1,15 bedeutet q = 1 + 0,15, also eine Zunahme um 15 %.
Der Faktor 1,015 bedeutet q = 1 + 0,015, also eine Zunahme um 1,5 %.
Der Faktor 1,8 bedeutet q = 1 + 0,80, also eine Zunahme um 80%.
Der Faktor 1,08 bedeutet q = 1 + 0,08, also ein Wachstum um 8%.

Die Beispiele a) Kontostand, b) Bakterienwachstum und e) Wahlumfrage gehören zum **sprunghaften Wachstum**, während c) Schimmelpilz und näherungsweise auch e) DAX zum **stetigen Wachstum** gehören (weil dabei auch alle Zwischenwerte auftreten können).

1.2 Fortgesetztes prozentuales Wachstum ergibt eine Wachstumsfolge

Beispiel 1: Kontostandsfolge eines Sparkontos

Ein anfängliches Guthaben von 2500 € wird mit einem Jahreszinssatz von 3% verzinst. Berechne den Kontostand K(n) nach 1, 2, 3, 6 und n Jahren, wobei keine zusätzlichen Einzahlungen zwischendurch erfolgen sollen.

Lösung:

Gemäß den Überlegungen aus 1.1 bedeutet dies, dass nach Ablauf eines Jahres der neue Kontostand durch Multiplikation mit dem Zinsfaktor $q = 1 + p = 1 + 0{,}03 = 1{,}03$ aus dem alten Kontostand entsteht. Es sei $K(n)$ der Kontostand in € nach n Jahren. Dann gilt:

Anfänglicher Kontostand: $K(0) = 2500$

Kontostand **nach 1 Jahr**: $K(1) = K(0) \cdot q$ d. h. $K(1) = 2500 \cdot 1{,}03 = 2575$

Kontostand **nach 2 Jahren**: $K(2) = K(1) \cdot q$ d. h. $K(2) = 2575 \cdot 1{,}03 = 2652{,}25$

Man kann K(2) direkt aus K(0) berechnen, ohne zuerst K(1) zu ermitteln:

$$K(2) = \underbrace{K(0) \cdot q}_{K(1)} \cdot q = \boxed{K(0) \cdot q^2} : \qquad K(2) = 2500 \cdot 1{,}03^2 = 2652{,}25$$

Kontostand **nach 3 Jahren:** $K(3) = K(2) \cdot q$

bzw. so: $K(3) = K(0) \cdot q^2 \cdot q = \boxed{K(0) \cdot q^3}$ $K(3) = 2500 \cdot 1{,}03^3 = 2731{,}81$

Kontostand **nach 6 Jahren:** $K(6) = K(0) \cdot q^6$ $K(6) = 2500 \cdot 1{,}03^6 = 2985{,}13$

Es wurde zu Gunsten der Bank abgerundet.

Kontostands-Funktion: $\boxed{K(n) = K(0) \cdot q^n}$ d. h. $K(n) = 2500 \cdot 1{,}03^n$

Ergebnis:

Gleichmäßiges prozentuales Wachstum führt zu einer

Exponentialfunktion: $\boxed{K(n) = a \cdot q^n}$

Dabei ist a = K(0) der **Startwert** (zur Zeit n = 0)

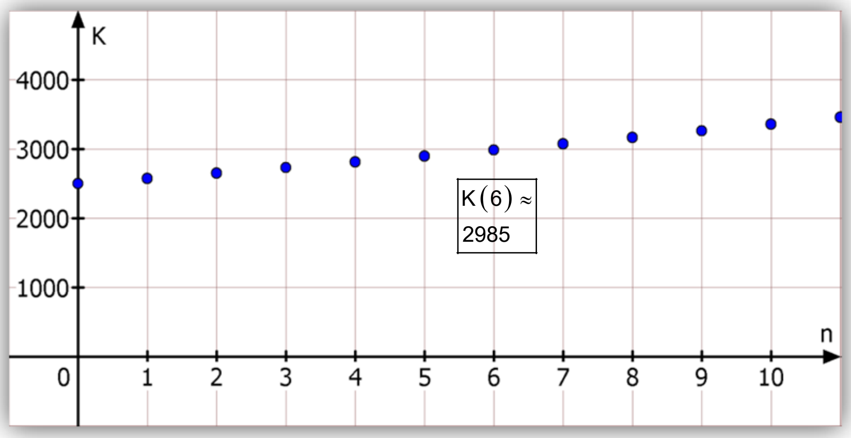
und $q = 1 + p$ der **Wachstumsfaktor**,

wenn K(n) pro Zeiteinheit um den **Prozentsatz** p zunimmt.

Diese Kontostandsfunktion K(n) ist eine **Zahlenfolge**, denn ihr Definitionsbereich ist $\mathbf{D} = \{0\,;1\ \ 2\,;3,...\}$. Es werden also nur Zahlen aus $\mathbf{N}_O$ eingesetzt, Zwischenwerte nicht.

Hinweis: Zahlenfolgen schreibt man sehr oft auch so: K_0, K_1, ... usw. Die tiefgesetzte Nummer gibt hier dann das Jahr der Verzinsung an, gerechnet ab der Einzahlung des Sparbetrags.
Man nennt diese Zahl auch den **Index** der Zahlenfolge.

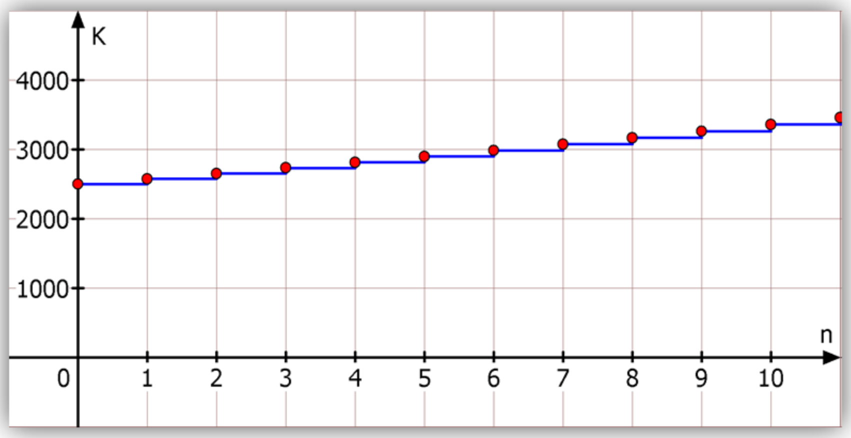
Zahlenfolgen werden im Schaubild nur als Punkte dargestellt:



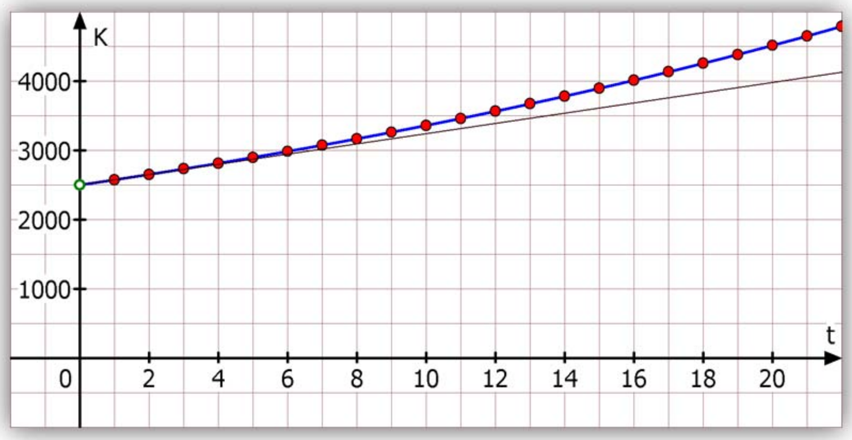
Dies ist das Schaubild der Zahlenfolge K(n) bzw. K_n.

Betrachtet man die Situation wirklichkeitsnäher, muss man bedenken, dass die Geldbeträge K(n) bei dieser etwas unrealistischen jährlichen Verzinsung ein Jahr lang den Kontostand bilden.

Dann ergibt das *Schaubild eine* Treppenkurve:



Die Punkte am linken Rand einer „Stufe" geben den jeweiligen Funktionswert an. Verbindet man die Punkte durch das Schaubild der stetigen (d. h. keine Sprünge machenden) Funktion $K(x) = 2500 \cdot 1{,}03^x$, bei der für x alle reellen Zwischenwerte x zugelassen sind, dann entsteht eine nach oben gekrümmte Kurve, die aber hier nicht fehl am Platz ist, weil kein stetiges Wachstum vorliegt. Um diese Krümmung besser zu erkennen, halbiere ich den Maßstab auf der Zeitachse und trage im Startpunkt die Tangente ein:



1.3 Was steckt hinter diesem Wachstum? Ein wenig ganz wichtige Theorie und Grundwissen.

Einen Bestand (z. B.: Geld), nehme in gleichen Zeitabschnitten um stets den gleichen Prozentsatz zu. Die Bestandswerte bilden eine Zahlenfolge, deren Zunahme man durch eine **Differenzengleichung** beschreiben kann. Sie ist **charakteristisch** für die Art der Zahlenfolge und liefert zudem eine **rekursive Berechnungsmethode**, bei der man Schritt für Schritt aus B(0) heraus alle weiteren Werte B(1), B(2) usw. berechnen kann.

Es sei $B(t)$ der Bestand zum Zeitpunkt t. Dann ist $B(t+1)$ der Bestand zum nächsten Zeitpunkt. Die Zunahme des Bestandes wird durch die Differenz dieser Werte beschrieben: $B(t+1)-B(t)$.

Beispiel:	**Allgemein:**
B(t) nimmt pro Zeiteinheit um p = 5% zu:	B(t) nimmt pro Zeiteinheit um p = k% zu:
Dann ist $B(t+1)=B(t)+0{,}05\cdot B(t)$	Dann ist $B(t+1)=B(t)+p\cdot B(t)$
Die Zunahme ist dann die Differenz	Die Zunahme ist dann die Differenz
$B(t+1)-B(t)=0{,}05\cdot B(t)$	$B(t+1)-B(t)=p\cdot B(t)$ (1)

Dividiert man durch B(t), erhält man die **relative Zunahme**:

$\dfrac{B(t+1)-B(t)}{B(t)}=0{,}05$	$\dfrac{B(t+1)-B(t)}{B(t)}=p$ (= konstant)

Das heißt: Die Zunahme ist proportional zum aktuellen Bestand B(t). Das muss man verstehen:
Hat der **Bestand** in einer bestimmten Zeitspanne um das 1,3-fache zugenommen, dann ist auch die **Zunahme** 1,3-mal so groß geworden.
Hat der Bestand sich in einer bestimmten Zeitpanne verdoppelt, dann ist auch die Zunahme doppelt so groß geworden. Das heißt, dass sogar die Zunahme zunimmt!
Aber: **Die relative Zunahme ist konstant**. Dazu schauen wir uns auf Seite 11 am Beispiel an.

So funktioniert die rekursive Berechnung von Bestandswerten:

$B(t+1)=B(t)+0{,}05\cdot B(t)$ $\qquad$ $B(t+1)=B(t)+p\cdot B(t)$

Rechts B(t) ausklammern:

$B(t+1)=(1+0{,}05)\cdot B(t)$ $\qquad$ $B(t+1)=(1+p)\cdot B(t)$

Den Klammerfaktor nennt man Zinsfaktor (oder Wachstumsfaktor) q:

$q=1+0{,}05=1{,}05$ $\qquad$ $q=1+p$

$B(t+1)=1{,}05\cdot B(t)$ $\qquad$ $B(t+1)=q\cdot B(t)$ (2)

Wenn ein Bestand in gleichen Zeitspannen stets um denselben Faktor p zunimmt, dann liegt prozentuales Wachstum vor. Dies wird durch die Gleichung Gleichung (1) ausgedrückt.
Daraus folgt die **rekursive Berechnungsformel** (2).

Zahlenfolgen, die dieses Bildungsgesetz haben, nennt man geometrische Folgen.

Diese fortgesetzte Multiplikation mit dem Wachstumsfaktor führt zur **absoluten Berechnungsformel**:

$B(1) = B(0) \cdot \boxed{q}$,

$B(2) = B(1) \cdot \boxed{q} = B(0) \cdot q \cdot \boxed{q} = B(1) \cdot q^2$

$B(3) = B(2) \cdot \boxed{q} = B(0) \cdot q^2 \cdot \boxed{q} = B(0) \cdot q^3$

...

Allgemein:

$B(t) = B(0) \cdot q^t$ (3)

z. B. $B(t) = B(0) \cdot 1{,}05^t$

Erkenntnis: Prozentuales Wachstum **führt zu einer Exponentialfunktion**,
Prozentuales Wachstum heißt daher auch **exponentielles Wachstum.**

WISSEN: Die Differenzengleichung $\boxed{B(t+1) - B(t) = p \cdot B(t)}$
hat die Funktion $B(t) = B(0) \cdot q^t$ **als Lösung, wobei q = 1+p ist.**

Kleine Aufgaben dazu:

a) Interpretiere die Gleichung der Wachstumsfolge $B(t) = 20 \cdot 1{,}3^t$ mit $t \in \mathbb{N}_o$.
Gib ihre Differenzengleichung an.

Lösung:

Den Startwert erhält man durch $B(0) = 20 \cdot 1{,}3^0 = 20$, denn $1{,}3^0 = 1$.

Die Basis 1,3 ist der Wachstumsfaktor q. Wegen $q = p + 1$ folgt $p = q - 1 = 0{,}3 = 30\%$.

Also nimmt jeder Bestandswert pro Zeiteinheit um 30% zu.

Man erhält also jeden neuen Wert durch Multiplikation mit q = 1,3: $B(t+1) = B(t) \cdot 1{,}3$

Die zugehörige **Differenzengleichung** ist also: $B(t+1) - B(t) = B(t) \cdot 1{,}3 - B(t) = B(t) \cdot 0{,}3$

b) Bestimme die Funktion B zur **Differenzengleichung** $B(t+1) - B(t) = 0{,}2 \cdot B(t)$,
wenn bekannt ist, dass $B(0) = 100$.

Lösung:

(1) Aus der Differenzengleichung kann man ablesen, dass es sich um prozentuales Wachstum mit p = 0,2 = 20% handelt.

(2) Damit lautet die Wachstumsfunktion (bzw. -folge): $B(t) = B(0) \cdot 1{,}2^t = 100 \cdot 1{,}2^t$.

Wenn jemand dieses Ergebnis ausführlich herleiten soll, dann braucht er dazu nur wenige Zeilen:

Aus der Differenzengleichung folgt:

$$B(t+1) = B(t) \cdot (1 + 0{,}2) = \boxed{B(t) \cdot 1{,}2}$$

Wir beginnen mit dem Startwert $B(0) = 100$ und berechnen der Reihe nach (also rekursiv):

$$B(1) = B(0) \cdot 1{,}2 = 100 \cdot 1{,}2 = 120$$
$$B(2) = B(1) \cdot 1{,}2 = (B(0) \cdot 1{,}2) \cdot 1{,}2 = B(0) \cdot 1{,}2^2 = 100 \cdot 1{,}44 = 144$$

$$B(3) = B(0) \cdot 1{,}2^3 = 100 \cdot 1{,}728 = 172{,}8$$
$$B(5) = B(0) \cdot 1{,}2^5 \approx 248{,}8$$

Das reicht dann schon um die Gesetzmäßigkeit dahinter zu erkennen:

Es gilt also allgemein: $B(t) = B(0) \cdot 1{,}2^t = 100 \cdot 1{,}2^t$

c) Zeige an Hand des Beispiels b), wie die Differenzen, also die Zunahmen proportional zu den Bestandswerten sind.

$B(2) - B(1) = B(1) \cdot 1{,}2 - B(1) = B(1) \cdot (1{,}2 - 1) = B(1) \cdot 0{,}2$ d. h. $\dfrac{B(2) - B(1)}{B(1)} = 0{,}2$.

$B(6) - B(5) = B(5) \cdot 1{,}2 - B(5) = B(5) \cdot (1{,}2 - 1) = B(5) \cdot 0{,}2$ d. h. $\dfrac{B(5) - B(4)}{B(4)} = 0{,}2$

Allgemein:

$B(t+1) - B(t) = B(t) \cdot 1{,}2 - B(t) = B(t) \cdot (1{,}2 - 1) = B(t) \cdot 0{,}2$ d. h. $\dfrac{B(t+1) - B(t)}{B(t)} = 0{,}2$

Interpretation: $B(t+1) - B(t) = 0{,}2 \cdot B(t)$

Die Größe B(t) nimmt zu, weil sie exponentiell wächst. In gleichem Maße nimmt die Differenz $\Delta B = B(t+1) - B(t)$ zu, denn sie ist immer 20% des B(t)-Wertes.

Ist also B(2) = 144, dann ist $\Delta B = B(t+1) - B(t) = \boxed{0{,}2} \cdot 144$

Ist $B(5) = 248{,}8$, dann ist $\Delta B = B(t+1) - B(t) = \boxed{0{,}2} \cdot 248{,}8$

Man sieht also, wie die Zunahme proportional zum Bestandswert B(t) wächst.

Die relative Zunahme ist genau der Faktor 0,2: $\dfrac{B(t+1) - B(t)}{B(t)} = \boxed{0{,}2}$,

also immer 20% (bei diesem Beispiel.)

Oder kurz ein andere Beispiel dazu:

Wenn sich Bakterien in 3 Stunden um 8 % vermehren, und es sind nach 10 Stunden $B(10) = 250$ vorhanden, dann sind es nach 13 Stunden $B(13) = B(10) \cdot 1{,}08 = 250 \cdot 1{,}08 = 270$. Die Zunahme beträgt dann $0{,}8 \cdot B(10) = 0{,}08 \cdot 250 = 20$ Bakterien. Nach 100 Stunden sind 90 Stunden vergangen, also 30 3-Stundenintervalle, in denen jedes Mal der Faktor 1,08 greift. Daher rechnet man so:

$B(100) = B(10) \cdot 1{,}08^{30} = 250 \cdot 1{,}08^{30} \approx 2516$. In den nächsten 3 Stunden wächst der Bestand wioeder um das 1,08-fache an auf $B(103) = 2516 \cdot 1{,}08 \approx 2717$, oder so:

$B(103) = B(10) \cdot 1{,}08^{31} = 250 \cdot 1{,}08^{31} \approx 2717$ Man muss sich hier stets auf 3-Stundenintervalle beziehen, weil ja auch die 8% Zunahme sich darauf beziehen.

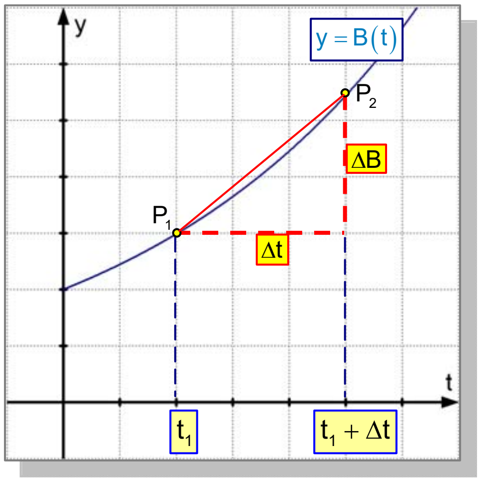
Man kann natürlich auch auf das 1-Stunden-Intervall umrechnen: Dann ist der Wachstumsfaktor $\sqrt[3]{1{,}08} \approx 1{,}026$. Beispiel: $B(11) = 250 \cdot 1{,}026 \approx 257$ usw. Oder man kann auf B(0) zurückrechnen:

Dann ist $B(10) = B(0) \cdot 1{,}026^{10} \quad \Rightarrow \quad B(0) = \dfrac{B(10)}{1{,}026^{10}} = \dfrac{250}{1{,}026^{10}} \approx 193$. Daraus folgt dann z.B.:

$B(1) = B(0) \cdot 1{,}026 = 193 \cdot 1{,}026 \approx 198$, was man auch so erreicht: $B(1) = \dfrac{B(10)}{1{,}08^3} = \dfrac{250}{1{,}08^3} \approx 198$

denn von t = 1 bis t = 10 sind es 3 3-Stunden-Inztrevalle…..

Ein weiterer wichtiger Begriff ist die Wachstumsrate:
Damit beschreibt man die Stärke des Wachstums.



Man kann aus zwei Werten $B(t_1)$ und $B(t_2)$ einer Wachstumsfolge **die durchschnittliche Zunahme pro Zeiteinheit zwischen diesen Bestandswerten** berechnen.

Diese Größe heißt **mittlere Wachstumsrate** $\overline{R}$.

Sie ist nichts anderes als die Steigung m der zugehörenden Strecke.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ausführlicher heißt dies:

$$\overline{R} = \frac{B(t_2) - B(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{oder} \quad \overline{R} = \frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t}, \quad \text{abgekürzt:} \quad \overline{R} = \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

Musterbeispiel:

Gegeben ist ein exponentielles Wachstum durch $B(t) = 20 \cdot 1{,}3^t$, t in Minuten.

Berechne die mittleren Wachstumsraten für die Zeitintervalle $[0;1]$, $[0;2]$ und $[6;10]$.

Lösung:

Für $[0;1]$ ist $\Delta t = 1 - 0 = 1$.

Aus $B(0) = 20$ und $B(1) = 10 \cdot 1{,}3^1 = 26$ folgt $\Delta B = B(1) - B(0) = 26 - 20 = 6$.

Die mittlere Wachstumsrate ist daher $\overline{R} = \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{6}{1} = 6$.

Für $[0;2]$ ist $\Delta t = 2$

Aus $B(0) = 20$ und $B(2) = 20 \cdot 1{,}3^2 = 33{,}8$ folgt: $\overline{R} = \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{33{,}8 - 20}{2} = \frac{13{,}8}{2} = 6{,}9$.

Für $[6;10]$ ist $\Delta t = 10 - 6 = 4$.

Aus $B(6) = 20 \cdot 1{,}3^6 \approx 96{,}54$ und $B(10) \approx 20 \cdot 1{,}3^{10} \approx 275{,}72$ folgt

$$\overline{R} = \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{275{,}72 - 96{,}54}{10 - 6} = \frac{179{,}18}{4} = 44{,}795.$$

Interpretation des letzten Ergebnisses:

In die Zeitspanne $[6\text{ min}; 10\text{ min}]$ nehmen die Werte pro Minute um durchschnittlich etwa 45 Einheiten zu.